Proračun složenih električnih mreža pri poznatim strujama potrošača

Lazar Šćekić
Univerzitet Crne Gore
Elektrotehnički fakultet

Formulacija matričnih metoda

- Metod napona nezavisnih čvorova:

$$Y_B V_B = I_B$$

$$I_B = AJ$$

$$Y_B = AYA^T$$

$$V_B = Y_B^{-1} I_B$$

$$U = A^T V_B$$

$$I = YU - J$$

- Metod struja nezavisnih kontura:

$$Z_L I_L = V_L$$

$$V_L = BE$$

$$Z_L = BZB^T$$

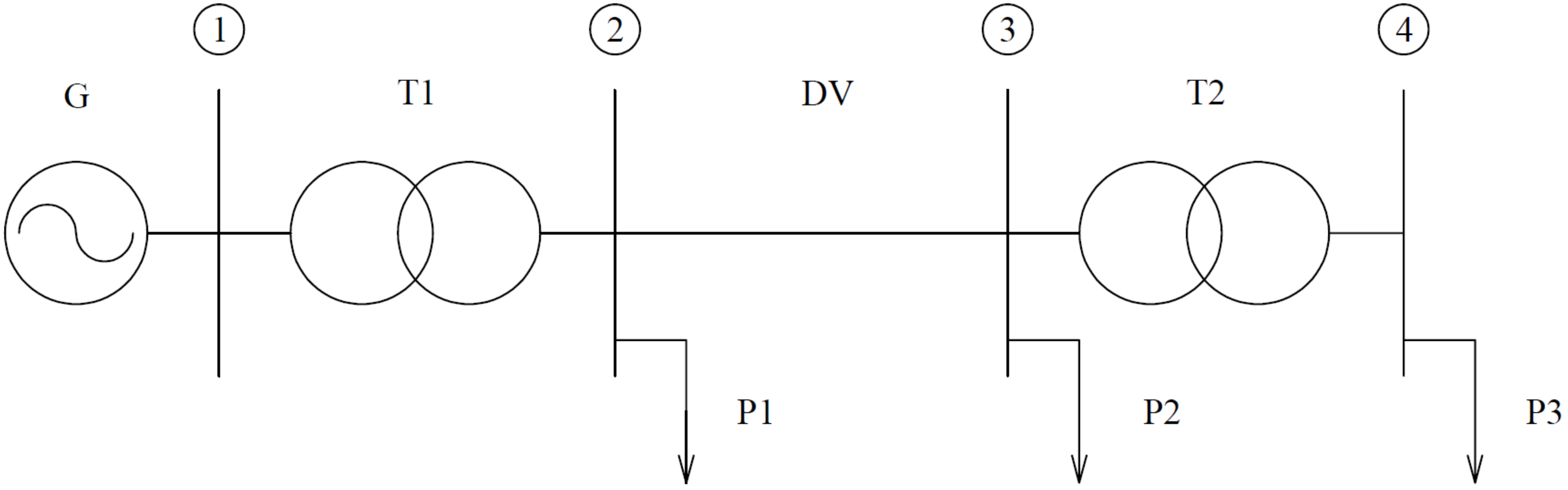
$$I_L = Z_L^{-1} V_L$$

$$I = B^T I_L$$

$$U = ZI - E$$

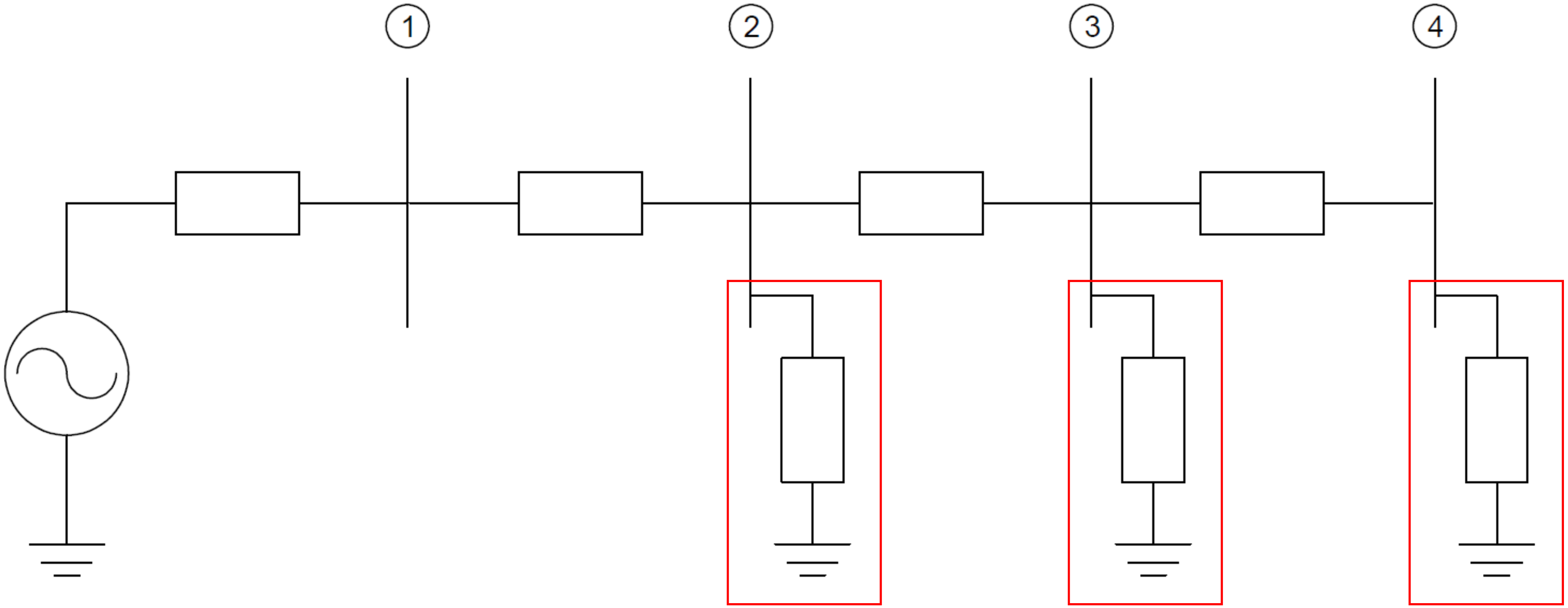
Jednopolna šema sistema

- Posmatra se elektroenergetski sistem čija je jednopolna šema:



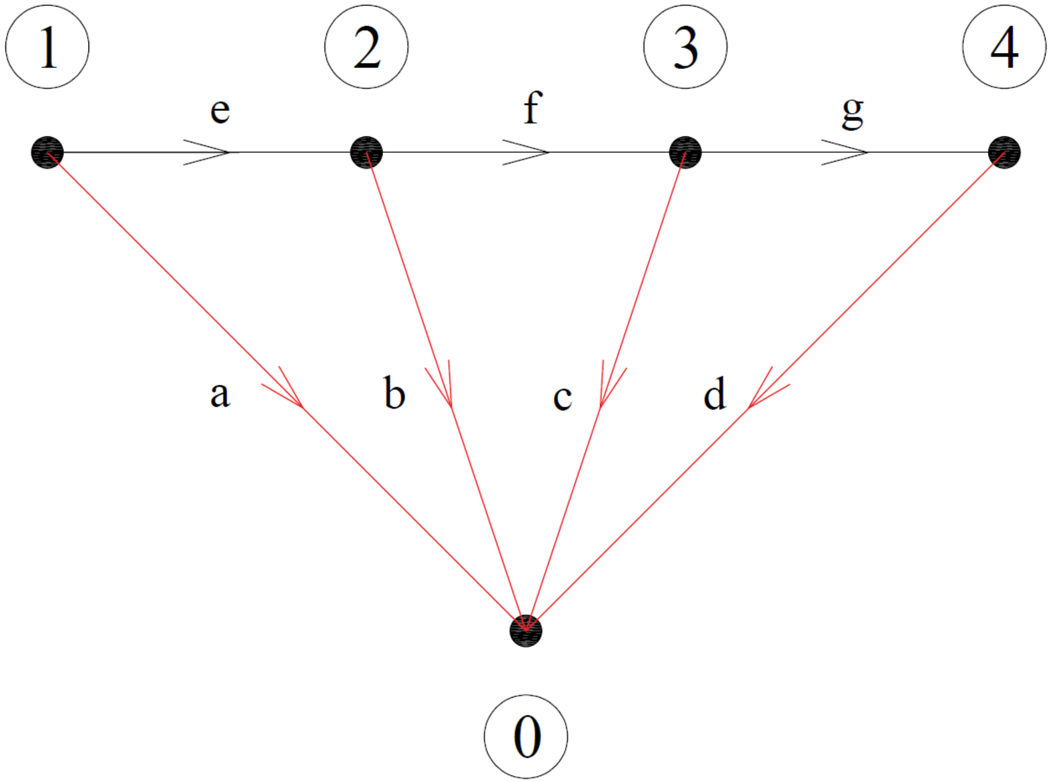
Ekvivalentna zamjenska šema

- Uz potrošače predstavljene modelom konstantne impedanse, ekvivalentna zamjenska šema ima oblik:



Graf mreže

- Graf mreže je tada oblika:



- Karakteristike grafa su:

$$c = 5$$

$$n = c - 1 = 4$$

$$b = 7$$

$$m = b - n = 3$$

Mane modela konstantne impedanse

- Mada su prisutne i kod metoda napona nezavisnih čvorova, mane predstavljanja potrošača modelom konstantne impedanse u proračunima strujno-naponskih prilika se najlakše uočavaju kod metoda struja nezavisnih kontura.
- Proračun strujno-naponskih prilika primjenom metoda struja nezavisnih kontura zahtijeva inverziju matrice Z_L koja ima dimenzije $m \times m$.
- S obzirom da je $m = b - n$, svaki potrošač predstavljen modelom konstantne impedanse povećava dimenzionalnost problema za 1.

Mane modela konstantne impedanse

```
function [time,memoryUsage] = matrixAnalysis(N)
    % Formiranje matrice dimenzija NxN
    M = rand(N,N) ;
    % Proračun potrebne memorije
    memoryUsage = numel(M)*8/1024 ;
    % Pokretanje štoperice
    tic
    % Inverzija matrice
    M_inv = inv(M) ;
    % Zaustavljanje štoperice
    time = toc ;
end
```

Dimenzija	Memorija [MB]	Vrijeme [ms]
500	1.91	1.59
1000	7.63	7.21
10000	762.94	718

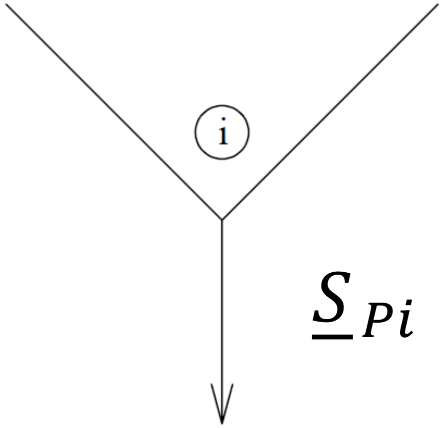
Mane modela konstantne impedanse

- Predstavljanje potrošača modelom konstantne impedanse povećava dimenzionalnost problema proračuna strujno-naponskih prilika, što u krajnjem:

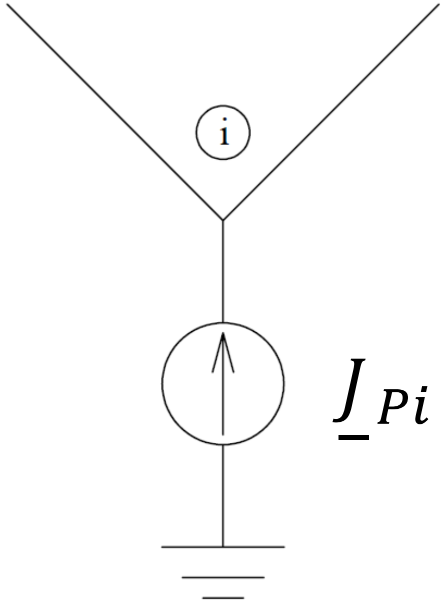
  1. Usložnjava ručne proračune strujno-naponskih prilika i
  2. Povećava zahtjeve za memorijom i procesorskom snagom računskog sredstva.

Model konstantne struje potrošača

- **Model konstantne struje** podrazumijeva ekvivalentiranje potrošača idealnim strujnim izvorima koji u mrežu injektiraju konstantnu struju $\underline{J}_{Pi}$ i koji se ne predstavljaju granom grafa:



$\underline{S}_{Pi}$



$$\underline{J}_{Pi} = -\frac{\underline{S}_{Pi}^{*}}{\sqrt{3}\underline{V}_i^{*}}$$

Model konstantne struje potrošača

- Problem: kako odrediti struju potrošača $\underline{J}_{Pi}$ kada ista zavisi od napona $\underline{V}_i$ koji nije unaprijed poznat?
- Za precizan proračun je neophodno uvažiti statičku karakteristiku potrošača sprovođenjem iterativne procedure:
  1. Pretpostavi se da je napon u čvoru i jednak nominalnom naponu i isti se iskoristi za proračun struje $\underline{J}_{Pi}^{(0)}$.
  2. Koristeći vrijednost struje $\underline{J}_{Pi}^{(k-1)}$ se sprovede proračun strujno-naponskih prilika čime se određuje $\underline{V}_i^{(k)}$.
  3. Nova vrijednost napona se koristi za određivanje $\underline{J}_{Pi}^{(k)}$.

Model konstantne struje potrošača

- Koraci 2 – 3 se ponavljaju do konvergencije, odnosno dok odstupanje vrijednosti napona između dvije iteracije ne bude niže od unaprijed definisane tačnosti ε:

$$\left|\underline{V}_i^{(k)} - \underline{V}_i^{(k-1)}\right| \leq \varepsilon$$

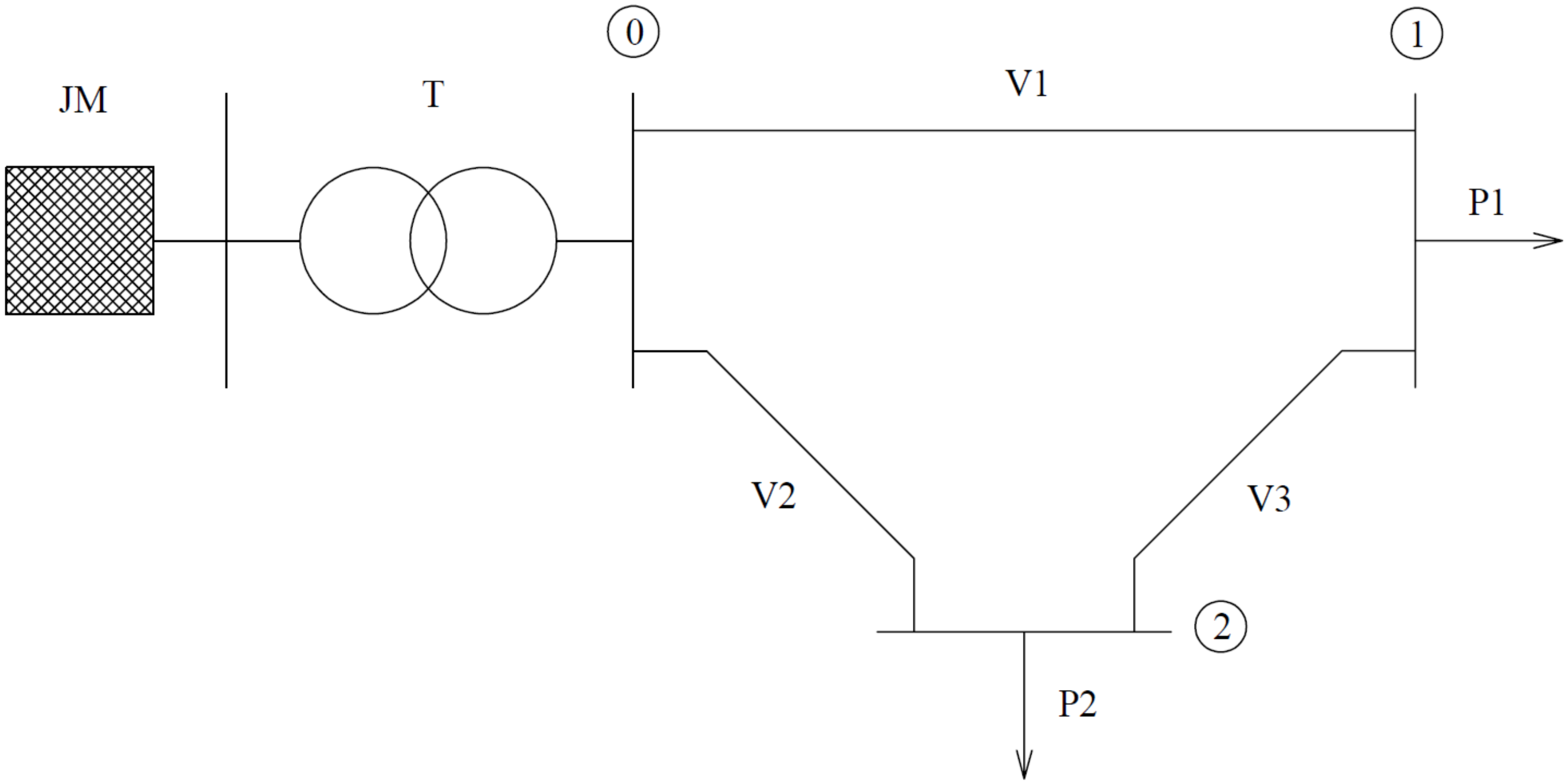
- Mana ovog pristupa je povećanje proračunske složenosti zbog iterativnog sprovođenja proračuna strujno-naponskih prilika.
- Ovaj problem se rješava tako što se struja potrošača odredi uz pretpostavku da je napon na sabirnicama potrošača jednak nominalnom naponu. Na taj način se, na uštrb tačnosti proračuna, značajno uprošćava proračun.

Model konstantne struje potrošača

- Primjena metoda za proračun strujno-naponskih prilika pri poznatim strujama potrošača zahtijeva definisanje **balansnog** i **referentnog** čvora.
- **Balansni čvor** je čvor preko kojeg se pokriva onaj dio potrošnje i gubitaka u sistemu koji ne pokrivaju ostali izvori sa fiksnim režimom rada.
- Kod jednostrano napajanih mreža kod kojih se koriste ove metode se za balansni čvor usvaja mjesto priključenja mreže na napojni sistem.
- Balansni čvor se najčešće proglašava i **referentnim čvorom**.

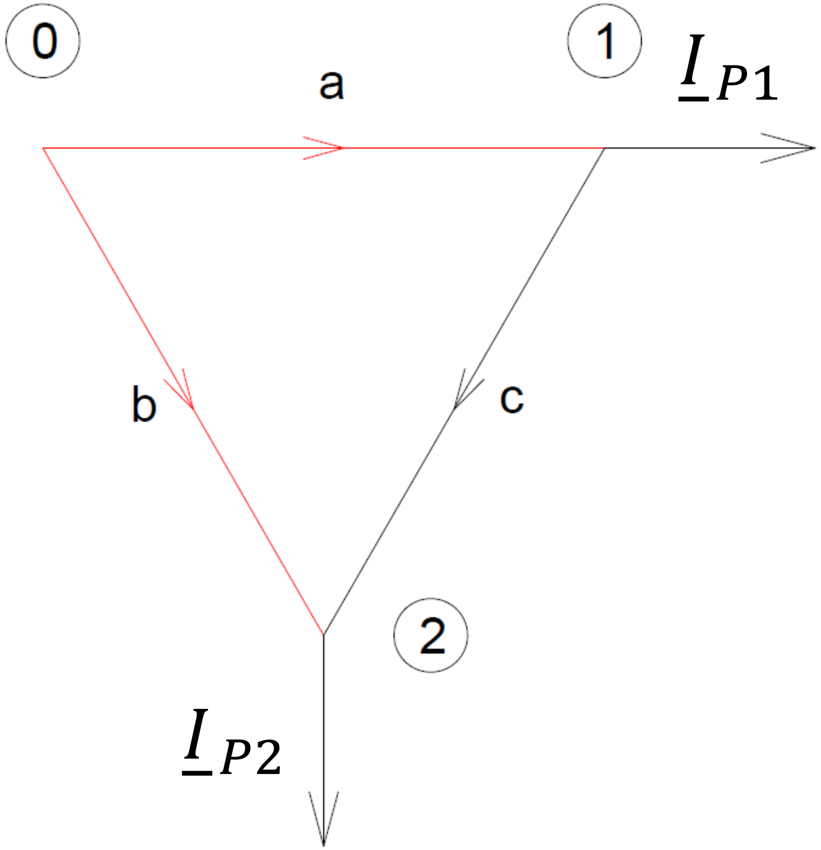
Direktni metod

- Neka se posmatra sistem čija je jednopolna šema:



Direktni metod

- Graf sistema je:



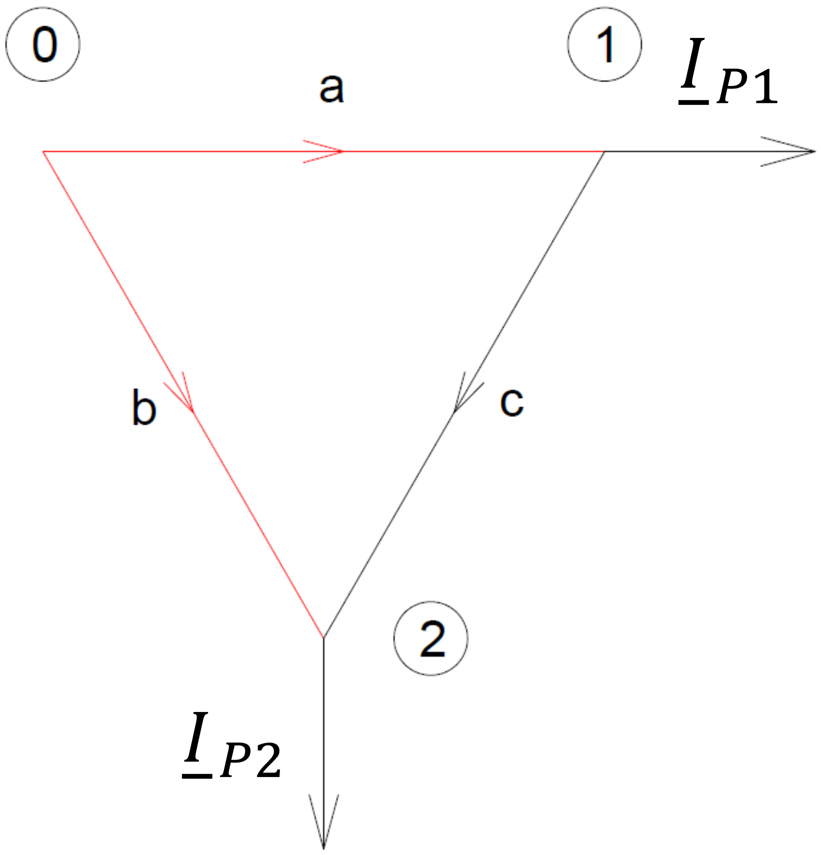
- Matrica incidencije grana i nezavisnih čvorova je tada oblika:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Kao što se uočava, iz matrice A je izostavljena vrsta koja odgovara referentnom čvoru (čvoru 0).

Direktni metod

- Graf sistema je:



- Tada je prvi Kirhofov zakon u matričnoj formi oblika:

$$AI = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{I}_a + \underline{I}_c \\ -\underline{I}_b - \underline{I}_c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{I}_{P1} \\ \underline{I}_{P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{P1} \\ \underline{J}_{P2} \end{bmatrix}$$

Direktni metod

- Drugim riječima, pri poznatim strujama potrošača, matrična jednačina prvog Kirhofovog zakona ima oblik:

$$AI = J \quad \ldots(1)$$

- Uz poznate struje potrošača, iz prethodne jednačine u opštem slučaju nije moguće odrediti struje grana kao:

$$I = A^{-1}J$$

- Razlog za ovo je što je matrica A u opštem slučaju petljastih mreža pravougaona matrica dimenzija $n \times b$. Sa druge strane, u radijalnim mrežama je inverzija matrice A moguća.

Direktni metod

- Kako bi prethodni sistem jednačina po nepoznatim strujama grana imao rješenje, jasno je da ga je neophodno proširiti sa $b - n = m$ dodatnih jednačina.
- Množenjem naponske jednačine primitivne mreže sa B slijedi:

$$U + E = ZI$$
$$BU + BE = BZI$$
$$BZI = V_L \quad \dots (2)$$

- Na ovaj način se dobija dodatnih m jednačina po nepoznatim strujama grana.

Direktni metod

- Kombinovanjem matričnih jednačina (1) i (2) u jednu, slijedi:

$$\begin{bmatrix} A \\ BZ \end{bmatrix} I = FI = \begin{bmatrix} J \\ V_L \end{bmatrix}$$

- Matrica F u prethodnoj relaciji je kvadratna matrica dimenzija $b \times b$ čija je inverzija moguća, pa se nepoznate struje grana tada određuju kao:

$$I = F^{-1} \begin{bmatrix} J \\ V_L \end{bmatrix}$$

- Uz poznate struje grana, naponi grana se indirektno određuju kao:

$$U = Z\left(I + I_g\right) - U_g$$

Direktni metod

- Napone grana je moguće odrediti i direktno polazeći od relacije:

$$U = ZI - E$$

- Množenjem prethodne relacije sa lijeve strane sa AZ^{-1} slijedi:

$$AZ^{-1}U = AZ^{-1}ZI - AZ^{-1}E = AI - AZ^{-1}E = J - AZ^{-1}E \ldots (3)$$

- Nakon formiranih vektora J i E, nepoznate napone grana je nemoguće odrediti kao:

$$U = (AZ^{-1})^{-1}(J - AZ^{-1}E\,)$$

- Razlog za to je što je matrica AZ^{-1} pravougaona matrica dimenzija $n \times b$.

Direktni metod

- Kako bi prethodni sistem jednačina po nepoznatim naponima grana imao rješenje, neophodno ga je dopuniti sa $b - n = m$ dodatnih jednačina, što je moguće ostvariti osnovnom matričnom jednačinom drugog Kirhofovog zakona:

$$BU = 0 \ldots (4)$$

- Kombinovanjem matričnih jednačina (3) i (4) u jednu, slijedi:

$$\begin{bmatrix} AZ^{-1} \\ B \end{bmatrix} U = GU = \begin{bmatrix} J - AZ^{-1}E \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Inverzijom matrice G koja je dimenzija $b \times b$ se određuju nepoznati naponi grana.

Direktni metod

- Jednačine:

$$I = F^{-1}\begin{bmatrix} J \\ V_L \end{bmatrix}$$

$$U = G^{-1}\begin{bmatrix} J - AZ^{-1}E \\ 0 \end{bmatrix}$$

predstavljaju osnovne jednačine **direktnog metoda** za proračun strujno-naponskih prilika pri poznatim strujama potrošača.

Direktni metod

- Mane direktnog metoda:

    1. Potreba za inverzijom matrica F i G koje imaju dimenzije $b \times b$.
    2. Matrice F i G pripadaju klasi rijetkih (sparse) matrica, odnosno klasi matrica sa velikim brojem nultih elemenata, što rezultira neekonomičnim korišćenjem memorije računara i velikim brojem operacija sa nultim elementima.

- Drugi problem se danas uspješno rješava korišćenjem tehnika tzv. rijetkog programiranja.

Metod napona nezavisnih čvorova

- Osnovna relacija koja povezuje napone grana i napone čvorova sa zemljom kao referentnim čvorom ima oblik:

$$U = A^T V_B$$

- Ako se proizvoljan čvor usvoji za referentni, prethodna jednačina dobija oblik:

$$U = A^T (V_B - U_r) = A^T U_\Delta$$

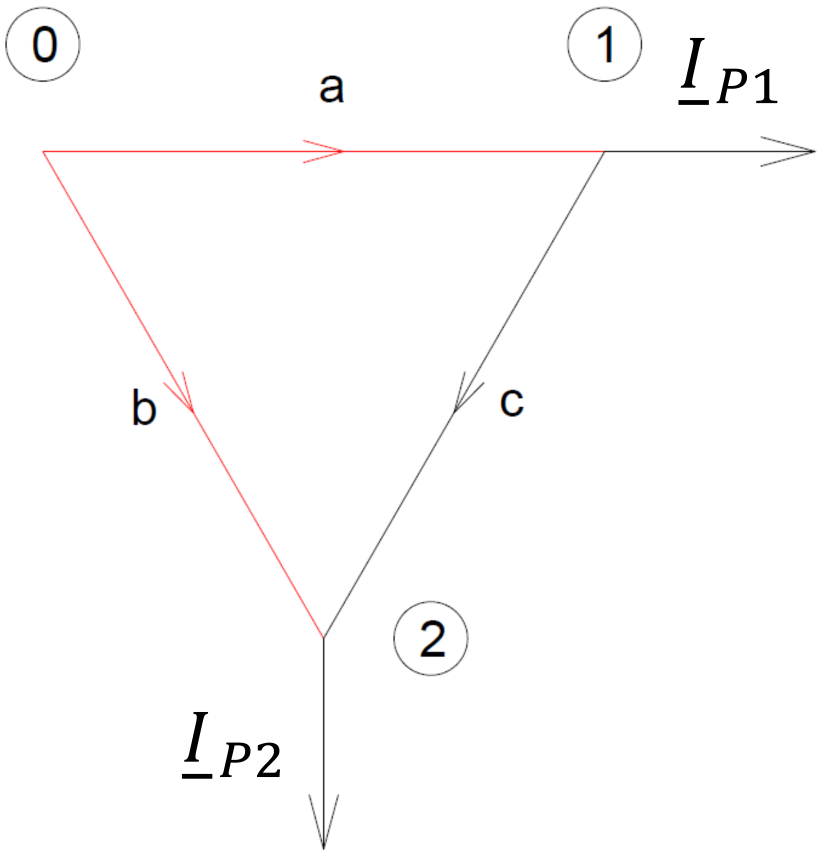
U_r predstavlja vektor referentnog napona čije su sve vrijednosti jednake naponu referentnog čvora, a U_Δ predstavlja vektor padova napona od svih čvorova do referentnog.

Metod napona nezavisnih čvorova

- U slučaju da kao referentni čvor nije izabran balansni čvor, u prethodnoj relaciji umjesto matrice A figuriše matrica A'.
- Matrica A' se dobija iz matrice A_+ tako što se iz nje ukloni vrsta koja odgovara referentnom čvoru.
- Matrica A_+ predstavlja proširenu matricu incidencije grana i nezavisnih čvorova koja je formirana za sve čvorove, uključujući balansni i referentni.

Metod napona nezavisnih čvorova

- Graf sistema je:



- Proširena matrica A_+ je oblika:

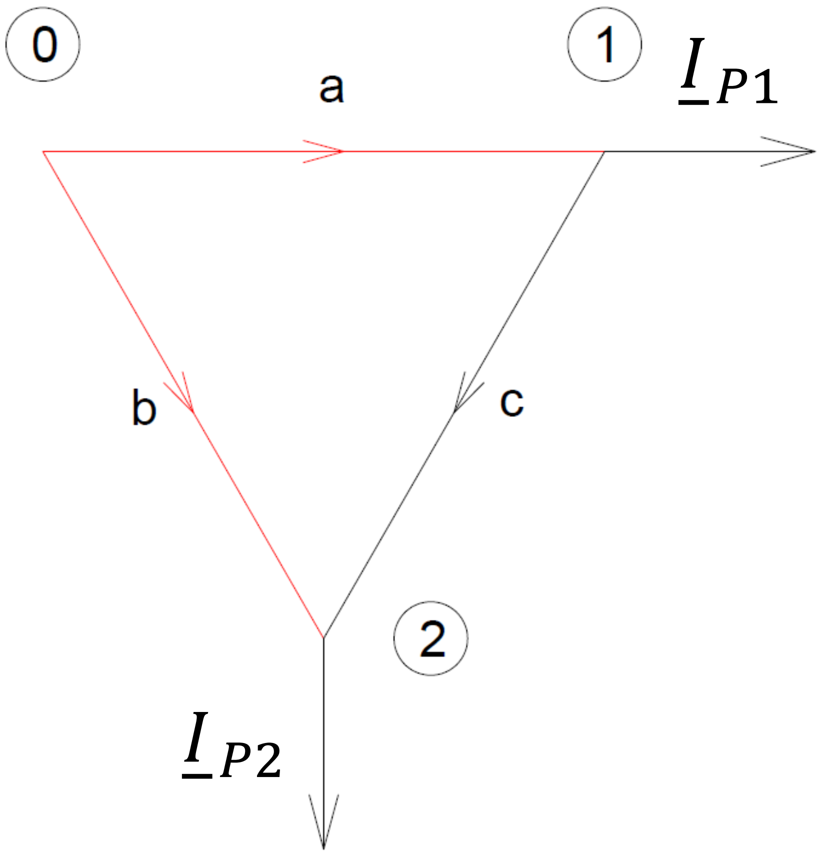
$$A_+ = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Ako se čvor 1 usvoji kao referentni, a čvor 0 kao balansni:

$$A' = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Metod napona nezavisnih čvorova

- Graf sistema je:



- Polazeći od jednačine $U = A'^{T} U_{\Delta}$ slijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 - U_r \\ V_2 - U_r \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} V_0 - U_r \\ V_0 - V_2 \\ U_r - V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$$

Metod napona nezavisnih čvorova

- Ako se iskombinuju relacije:

$$U = A'^{T} U_{\Delta} \text{ i } U = ZI - E$$

slijedi:

$$A'^{T} U_{\Delta} = ZI - E$$

- Množenjem prethodne relacije sa lijeve strane sa $A'Z^{-1}$ slijedi:

$$A'Z^{-1}A'^{T}U_{\Delta} = A'Z^{-1}ZI - AZ^{-1}E$$

odnosno:

$$Y_B U_{\Delta} = J - AZ^{-1}E$$

Metod napona nezavisnih čvorova

- Množenjem prethodne relacije sa lijeve strane sa $Y_B^{-1} = Z_B$ slijedi:

$$U_\Delta = Z_B J - Z_B A Z^{-1} E = Z_B J + DE$$

nakon čega se dolazi do osnovne jednačine metoda napona nezavisnih čvorova pri poznatim strujama potrošača:

$$V_B = U_r + Z_B J + DE$$

- U prethodnim relacijama, matrica $D = -Z_B A Z^{-1}$ predstavlja matricu kompleksnih koeficijenata raspodjele napona.

Metod struja nezavisnih kontura

- Ako se teorema superpozicije primjeni na proizvoljan sistem sa potrošačima predstavljenim modelom konstantne struje, struje grana se mogu odrediti kao:

$$I = I' + I''$$

gdje je:

I' – vektor struja grana određen pod uslovom da u mreži ne djeluju strujni izvori potrošača, a

I'' – vektor koji kvantifikuje uticaj potrošača na struje grana.

Metod struja nezavisnih kontura

- U slučaju kada u mreži ne djeluju strujni ekvivalentni potrošača, struje grana se mogu odrediti kao:

$$I' = B^T I_L$$

gdje je:

B – matrica incidencije grana i nezavisnih kontura, a

I_L – vektor struja nezavisnih kontura.

Metod struja nezavisnih kontura

- Sa druge strane, osnovna matrična jednačina prvog Kirhofovog zakona u slučaju poznatih struja potrošača ima oblik:

$$AI'' = J$$

- Kao što je ranije opisano, rješenje prethodnog sistema jednačina nije jednoznačno, jer ga čini n jednačina sa b nepoznatih, gdje je u opštem slučaju petljastih mreža $b > n$.
- Kako bi prethodni sistem jednačina imao rješenje, iz njega je potrebno eliminisati $b - n = m$ nepoznatih, što je moguće ostvariti uvođenjem pretpostavke da su struje grana kostabla jednake nuli.

Metod struja nezavisnih kontura

- Razdvajanjem prethodne matrične jednačine na blokove, dolazi se do jednačine:

$$[A_S \quad A_K]\begin{bmatrix} I_S'' \\ I_K'' \end{bmatrix} = J$$

koja u razvijenoj formi ima oblik:

$$A_S I_S'' + A_K I_K'' = J$$

- S obzirom da je pretpostavljeno da su struje grana kostabla jednake nuli, to slijedi:

$$A_S I_S'' = J$$

Metod struja nezavisnih kontura

- Kako je A_S kvadratna matrica dimenzija $n \times n$, to je njena inverzija moguća, tako da su struje grana stabla koje su posljedica strujnih injektiranja potrošača:

$$I''_S = A_S^{-1} J$$

- Tada se vektor struja grana I'' može izraziti kao:

$$I'' = \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} J$$

Metod struja nezavisnih kontura

- Kombinovanjem izraza za I' i I'' slijedi:

$$I = B^T I_L + \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} J$$

- Kao što je ranije navedeno, prethodni izraz za struje grana je određen uz pretpostavku da se struje koje su posljedica strujnih ekvivalenata potrošača zatvaraju isključivo granama stabla.
- Kako navedena pretpostavka u opštem slučaju nije zadovoljena, neophodno je uticaj potrošača na struje grana kvantifikovati prilikom određivanja konturnih struja I_L.

Metod struja nezavisnih kontura

- Struje uravnoteženja je moguće odrediti polazeći od činjenice da za sve konture u sistemu mora biti zadovoljen drugi Kirhofov zakon:

$$U + E = ZI$$

- Množenjem prethodne relacije sa B i zamjenom izraza za struju slijedi:

$$BU + BE = BZ\left(B^T I_L + \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m\times n} \end{bmatrix} J\right)$$

Metod struja nezavisnih kontura

- Nakon sređivanja, struje nezavisnih kontura se mogu odrediti primjenom relacije:

$$I_L = Y_L \left(V_L - BZ \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m\times n} \end{bmatrix} J \right)$$

- Kako je u pasivnim mrežama $V_L = 0_{m\times 1}$, to je:

$$I = -B^T Y_L BZ \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m\times n} \end{bmatrix} J + \begin{bmatrix} A_S^{-1} \\ 0_{m\times n} \end{bmatrix} J$$